

OFDM 시스템을 위한 효율적인 입방 스플라인 보간 기법

곽병재, 김진경, 고영조
한국전자통신연구원

{bjkwak, jkkim, koyj}@etri.re.kr

An Efficient Cubic Spline Interpolation Scheme for OFDM Systems

Kwak, Byung-Jae; Kim, Jin Kyeong; Ko, Young-Jo
Electronics and Telecommunications Research Institute

요약

본 논문은 OFDM 시스템을 위한 효율적인 입방 스플라인 보간 기법을 제안한다. 제안된 기법은 FFT/IFFT 기반의 기존 보간 기법과 비교하여 계산 복잡도 측면에서 훨씬 효율적이며, 제안된 기법의 성능을 예제를 통하여 평가한다.

I. 서론

무선 통신 시스템에서 이산 시간 신호의 보간은 종종 시스템의 다양한 기능을 수행하기 위해 필요하다(예: 최대값이 데이터 샘플 사이에 있을 때 교차 상관 신호의 최대 값 찾기).

가. 문제 제기

신호 $y(t)$ 의 이산 신호 샘플 값 $y_n = y(nT_s)$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 이 주어질 때, 시간 $t = mT_s + \tau$ 에서 $y(t)$ 를 찾는다. 여기서 m 은 임의의 정수 값이고 $0 < \tau < 1$ 이다. 단순히 표기하기 위해, 일반성 손실없이 $T_s = 1$ 라고 가정한다.

$y(t)$ 를 찾는 가장 일반적인 방법은 FFT/IFFT와 같은 빠른 알고리즘을 사용하여 보간을 수행하는 것이다[1]. 그러나 보간에 FFT/IFFT를 사용하면 다음과 같은 문제가 발생한다:

- 샘플 수(FFT 포인트 수)는 2의 거듭제곱이어야 한다.
- 계산 비용은 FFT 포인트 수에 비례한다.
- 임의의 $0 < \tau < 1$ 에 대한 보간은 불가능하다.

본 논문에서는 이러한 제약 사항을 해결하기 위해 입방 스플라인을 기반으로 하는 보간 기법을 제안한다.

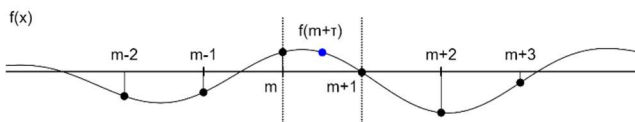


그림 1. y_m 와 y_{m+1} 간의 보간 샘플 탐색

나. 가정

문제를 단순화하기 위해 다음과 같이 가정한다.

- 균일한 샘플링 간격: 입방 스플라인 보간은 다목적 작업이며 균일하지 않은 샘플링 간격에도 똑같이 잘 작동한다. 그러나 무선 통신에서 발견되는 이산 시간 신호는 균일한 샘플링 신호이므로 단순성을 위해 샘플링 간격이 균일한 신호임에 초점을 맞춘다.

- 6 개의 연속 샘플을 사용할 수 있으며, 여기서 3 개의 샘플은 그림 1 과 같이 관심 간격의 왼쪽에 위치하고 3 개의 샘플은 관심 간격의 오른쪽에 위치한다.

II. 입방 스플라인 보간 기법

가. 곡선의 스플라인 분할

입방 스플라인 보간은 먼저 곡선을 일정 구간으로 나눈 다음 각 구간에 가장 적합한 입방 다항식을 찾는 방법으로 작동한다[2]. 본 논문에서, 우리는 모든 무선 통신 시스템의 경우가 그러하기 때문에 모든 구간의 길이가 같다고 가정한다.

종래의 기법:

그림 2(a)는 3 개의 구간을 갖는 $f(x)$ 와 4 개의 제어 포인트 $y_i = f(m-1+i)$, $i = 0, 1, \dots, 3$ 의 예를 보여준다.

- Segment 0: $x \in [m-1, m]$
- Segment 1: $x \in [m, m+1]$
- Segment 2: $x \in [m+1, m+2]$

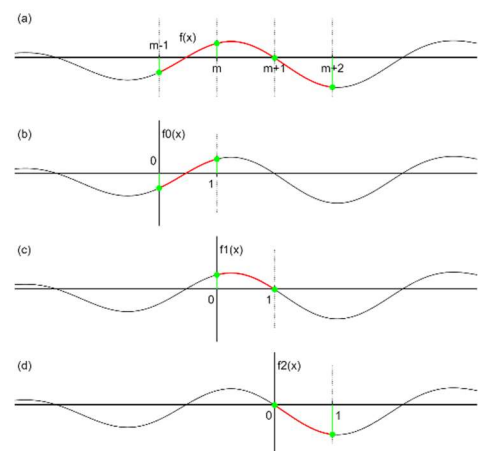


그림 2. 종래의 입방 스플라인 보간 기법의 구간

곡선 $f(x)$ 는 여러 구간을 조합하여 재구성할 수 있다. $f_0(x)$, $f_1(x)$, 및 $f_2(x)$ 를 각각 $f(x)$ 의 구간 0, 1, 및 2 라 하면, $f(x)$ 는 다음과 같이 구간의 조합으로 표현된다.

$$f(x) = f_0(x - (m-1)) + f_1(x - m) + f_2(x - (m+1))$$

여기서 $m-1 \leq x \leq m+2$ 이고, $f_0(x)$, $f_1(x)$, 및 $f_2(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) &= a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ f_2(x) &= a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3, & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

구간 $f_0(x)$, $f_1(x)$, 및 $f_2(x)$ 는 $0 \leq x \leq 1$ 에서만 정의되고, 나머지 부분에서는 0이다.

계산해야 할 $4N = 4 \times 3 = 12$ 계수가 있다. 여기서 N 은 구간의 수이다. 계수는 다음과 같은 연속성 조건에서 얻은 $4N$ 선형 방정식 시스템을 풀어써 얻을 수 있다.

- C^0 연속성: 각 구간은 제어점을 통과해야 한다 (즉, $f_i(0) = y_i$, $f_i(1) = y_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, when $N = 3$). 여기서 $2N = 6$ 방정식을 얻는다.
- C^1 연속성: 구간은 만나는 위치와 동일한 기울기를 가져야 한다. 즉, $f'_i(1) = f'_{i+1}(0)$, $i = 0, 1$. 여기서 $N - 1 = 2$ 방정식을 얻는다.
- C^2 연속성: 구간은 만나는 위치에서 동일한 곡률을 가져야 한다. 즉, $f''_i(1) = f''_{i+1}(0)$, $i = 0, 1$. 여기서 $N - 1 = 2$ 방정식을 얻는다.
- 두 개의 방정식: 누락된 2 개의 방정식은 곡선의 양쪽 끝에 첫 번째 미분으로 얻을 수 있다. 즉, $f'_0(0) = S_0$ 와 $f'_2(1) = S_1$.

제한 기법:

종래의 방식에서 S_0 와 S_1 은 알려져 있지 않다. 이 문제를 해결하기 위해, 본 기법은 그림 3과 같이 두 개의 제어점을 더 사용한다. 그림 3(a)는 3 개의 세그먼트와 6 개의 제어점 $y_i = f(m-1+i)$, $i = -1, 0, \dots, 4$ 을 갖는 곡선 $f(x)$ 를 보여준다.

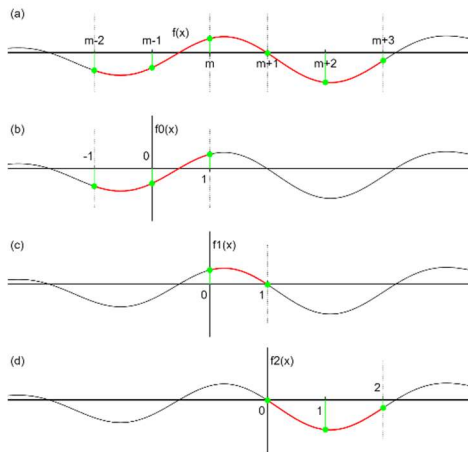


그림 3. 제안된 입방 스플라인 보간 구간

종래의 입방 스플라인 보간법과 유사하게, 곡선 $f(x)$ 는 구간을 함께 연결하여 재구성할 수 있다. $f_0(x)$, $f_1(x)$, 및 $f_2(x)$ 를 각각 $f(x)$ 의 구간 0, 1, 및 2 라 하면, $f(x)$ 는 다음과 같이 구간의 조합으로 표현된다.

$$f(x) = f_0(x - (m-1)) + f_1(x - m) + f_2(x - (m+1))$$

여기서 $m-2 \leq x \leq m+3$ 이고, $f_0(x)$, $f_1(x)$, 및 $f_2(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3, & -1 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) &= a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ f_2(x) &= a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3, & 0 \leq x \leq 2 \end{aligned} \quad (1)$$

구간 $f_0(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 1$, $f_1(x)$ 는 $0 \leq x \leq 1$ 그리고 $f_2(x)$ 는 $0 \leq x \leq 2$ 에서만 정의되고, 나머지 부분에서는 0이다.

앞서와 동일하게 계산해야 할 $4N = 4 \times 3 = 12$ 계수가 있다. 여기서 N 은 구간의 수이다. 계수는 다음과 같은 연속성 조건에서 얻은 $4N$ 선형 방정식 시스템을 풀어써 얻을 수 있다.

- C^0 연속성: 각 구간은 제어점을 통과해야 한다 (i.e., $f_0(-1) = y_{-1}$, $f_2(2) = y_4$, and $f_i(0) = y_i$, $f_i(1) = y_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, when $N = 3$). 여기서 $2N + 2 = 8$ 방정식을 얻는다.
- C^1 연속성: 구간은 만나는 위치와 동일한 기울기를 가져야 한다. 즉, $f'_i(1) = f'_{i+1}(0)$, $i = 0$. 여기서 $N - 1 = 2$ 방정식을 얻는다.
- C^2 연속성: 구간은 만나는 위치에서 동일한 곡률을 가져야 한다. 즉, $f''_i(1) = f''_{i+1}(0)$, $i = 0, 1$. 여기서 $N - 1 = 2$ 방정식을 얻는다.

나. 선형 방정식 시스템

y_i , $i = -1, 1, \dots, 4$ 를 $f(x)$ 의 6 개 이산 시간 샘플이라 하면, 연속성 조건에 따라 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_0(-1) &= y_{-1} \\ f_0(0) &= y_0 \\ f_0(1) &= y_1 \\ f'_0(1) &= f'_1(0) \\ f''_0(1) &= f''_1(0) \\ f_1(0) &= y_1 \\ f_1(1) &= y_2 \\ f'_1(1) &= f'_2(0) \\ f''_1(1) &= f''_2(0) \\ f_2(0) &= y_2 \\ f_2(1) &= y_3 \\ f_2(2) &= y_4 \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1)을 (2)에 대입하면, 식 (2)는 다음의 행렬로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서

$$A^{-1} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -62 & 88 & -24 & -7 & 30 & -30 & 6 & 2 & -7 & 8 & -1 \\ 45 & -90 & 45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 62 & -43 & 24 & 7 & -30 & 30 & -6 & -2 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -56 & 49 & -42 & 14 & -60 & 60 & -12 & -4 & 14 & -16 & 2 \\ -12 & 96 & -84 & 72 & -24 & -90 & 90 & -18 & -6 & 21 & -24 & 3 \\ 5 & -40 & 35 & -30 & 10 & 60 & -60 & 30 & 10 & -35 & 40 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & -14 & 12 & -4 & -60 & 60 & -48 & 14 & -49 & 56 & -7 \\ 3 & -24 & 21 & -18 & 6 & 90 & -90 & 72 & -21 & -84 & 96 & -12 \\ -1 & 8 & -7 & 6 & -2 & -30 & 30 & -24 & 7 & 43 & -62 & 19 \end{bmatrix}$$

A^{-1} 는 정수로 작성할 수 있다.

$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ 에만 관심이 있기 때문에 식 (3)은 다음과 같이 단순화될 수 있다:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 \mathcal{A} 는 행렬 A^{-1} 의 4, 5, 6, 7 행과 0, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 11 열의 (4×8) 행렬이다. 즉,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -56 & 49 & -60 & 60 & 14 & -16 & 2 \\ -12 & 96 & -84 & -90 & 90 & 21 & -24 & 3 \\ 5 & -40 & 35 & 60 & -60 & -35 & 40 & -5 \end{bmatrix}$$

y_1 와 y_2 는 각각 (4)에서 두 번 나타나므로, (4)는 다음과 같이 더욱 단순화될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \mathcal{B} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$\mathcal{B} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -56 & -11 & 74 & -16 & 2 \\ -12 & 96 & -174 & 111 & -24 & 3 \\ 5 & -40 & 95 & -95 & 40 & -5 \end{bmatrix}$$

행렬 \mathcal{B} 는 미리 계산될 수 있다. 또한 다른 벡터를 가진 \mathcal{B} 의 첫 번째 행의 내적은 단일 스칼라 곱셈만을 필요로 한다.

다. 중간점 계산

6 개의 이산 신호 샘플이 식 (5)로부터 다음과 같이 주어질 때,

$$\{y_{-1} = f(m-2), y_0 = f(m-1), \dots, y_4 = f(m+3)\}$$

보간점 $f(m+\tau)$ 는 다음과 같다.

$$f(m+\tau) = a_1 + b_1\tau + c_1\tau^2 + d_1\tau^3 = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \tau^2 & \tau^3 \end{bmatrix} \mathcal{B} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

여기서 $0 < \tau < 1$ 이다. 일반적으로 $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M\}$ 의 경우,

$$\begin{bmatrix} f(m+\tau_1) \\ f(m+\tau_2) \\ \vdots \\ f(m+\tau_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ 1 & \tau_2 & \tau_2^2 & \tau_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tau_M & \tau_M^2 & \tau_M^3 \end{bmatrix} \mathcal{B} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

III. 제안된 보간 기법 평가

동기화 신호의 도착 시간을 추정하려고 교차 상관기 출력을 인자 2 에 의해 오버샘플링된 이상적인 동기 함수라 가정하자:

$$f(n) = \text{sinc}\left(\frac{n-t_0}{2}\right)$$

여기서 $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ 는 정규화된 sinc 함수이고, t_0 는 샘플링 간격 T_s 의 의해 정규화된 도착 시간이다. 목표는 높은 정확도로 t_0 를 추정하는 것이다.

$f(n)$ 는 그림 4 와 같다.

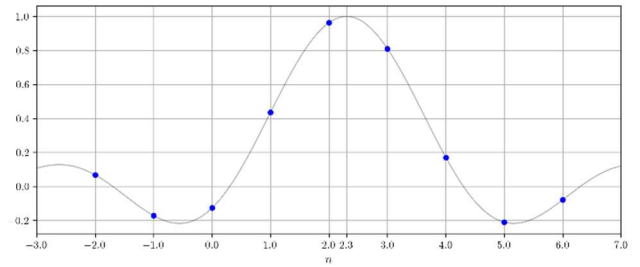


그림 4. 교차 상관기 출력 신호 $f(n)$

보간을 하지 않으면, 도착 예상 시간은 $\hat{t}_0 = 2$ 이다. 도착 시간을 보다 정확하게 추정하기 위해 제안된 기법을 사용하여 업샘플링 계수 10(2 의 거듭제곱이 아님)으로 보간을 수행하면, 그 결과는 그림 5 와 같이 $\hat{t}_0 = 2.3$ 에서 피크는 0.9954 이다.

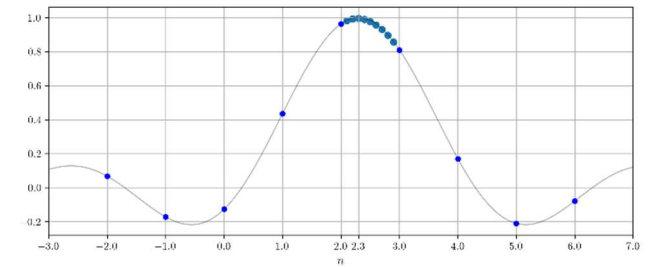


그림 5. $n = 2.0 + \tau$ 에서 보간된 $f(n)$, 여기서 $\tau = 0.1i$, $i = 1, 2, \dots, 9$.

IV. 결론

본 논문에서는 OFDM 시스템을 위한 효율적인 임방 스플라인 보간 기법을 제안했다. 제안된 방법은 FFT/IFFT 기반의 기존 보간 방법에 비해 계산 복잡도 측면에서 훨씬 더 효율적이다. 또한, 제안된 기법은 보간을 위해 샘플 사이의 임의의 지점을 선택할 수 있게 함으로써 임의의 시간 정밀도를 허용한다. 성능평가 결과 잡음이 없는 단순한 시나리오에서 보간된 시료의 추정오차는 0.5% 미만으로 나타났다. 그러나 제안된 방법은 보간을 수행하기 위해 6 개의 인접 샘플만 사용하므로 낮은 SNR 에 취약하다. 이로 인해 제안된 보간 방법의 적용이 제한될 수 있다. 예를 들어 잡음 신호가 교차 상관기에 의해 일정 시간 동안 평활화되어 SNR 이 크게 증가되는 경우, 교차 상관의 피크 검출을 사용하여 도착 시간을 추정하는 데 본 방식을 사용할 수 있다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2023 년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 정보통신기획평가원의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2021-0-00746, Tbps 무선백홀 기술)

참 고 문 헌

- [1] John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, 3rd Edition, Prentice Hall, October 5, 1995.
- [2] Gary D. Knott, *Interpolating Cubic Splines*, Birkhäuser Boston, December 28, 1999.